In the Name of God

DYNAMICS

[Course No. 8102128]

Dr. Mehdi Ghassemieh

m.ghassemieh@ut.ac.ir
Tel. 6111-2273
Fax. 6640-3808

بنام خدا

دینامیک (نیمسال ۲-۹۷-۹۶)

شماره درس ۸۱۰۲۱۲۸

دکتر مهدی قاسمیه

دانشکده مهندسی عمران

فصل دوم :

KINETICS OF PARTICLES

سینتیک ذرات: قانون دوم نیوتون

قانون دوم نیوتون : اگر برآیند نیروهای وارد بر ذره ای صفر نباشد , ذره شتابی متناسب با بزرگی برآیند و در راستای این نیروی برآیند خواهد داشت.

قانون اول :

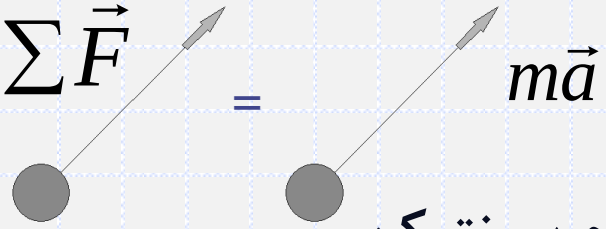
$$\Sigma \vec{F} = 0$$

قانون دوم :

$$\sum \vec{F} - m\vec{a} = 0 \quad or \quad \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

نیروی مؤثر یا نیروی اینرسی (شبه نیرو) : ma



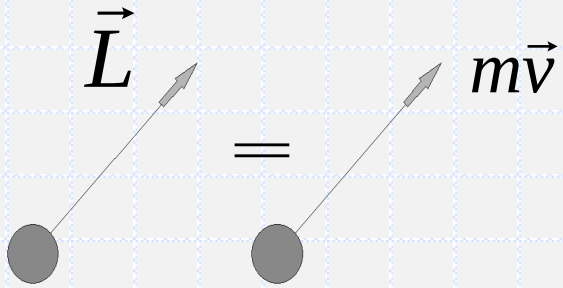
دیاگرام آزاد نیروها **دیاگرام سینتیک**

ممنتوم خطی یا اندازه حرکت خطی (Linear Momentum):

بردار **mv** را تکانه خطی یا اندازه حرکت خطی و یا به اختصار اندازه حرکت می گویند.

$$m\vec{v} = \vec{L}$$

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{L}}$$



واحد ممنتوم:

$SI:$ $\quad kg\ \frac{m}{s} = \left(kg.\frac{m}{s^2}\right).s = N.s$

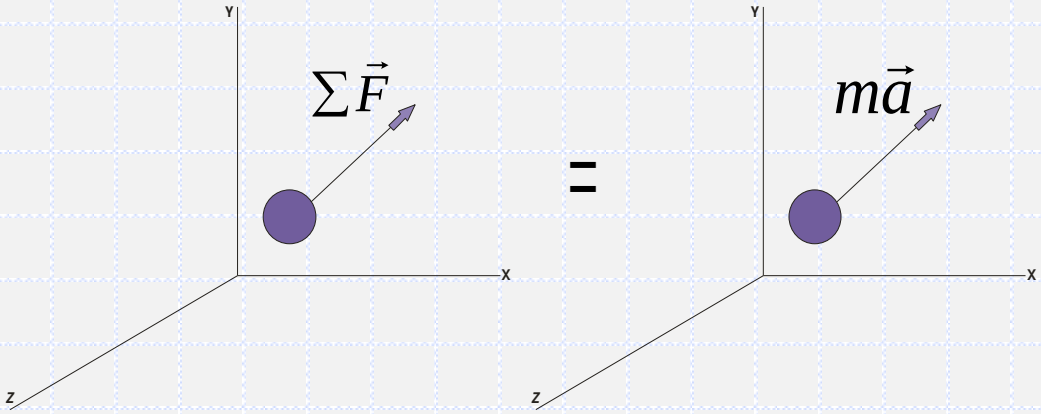
$FPS:$ $\quad Ib.s$

مختصات سه بعدی کارتزین:

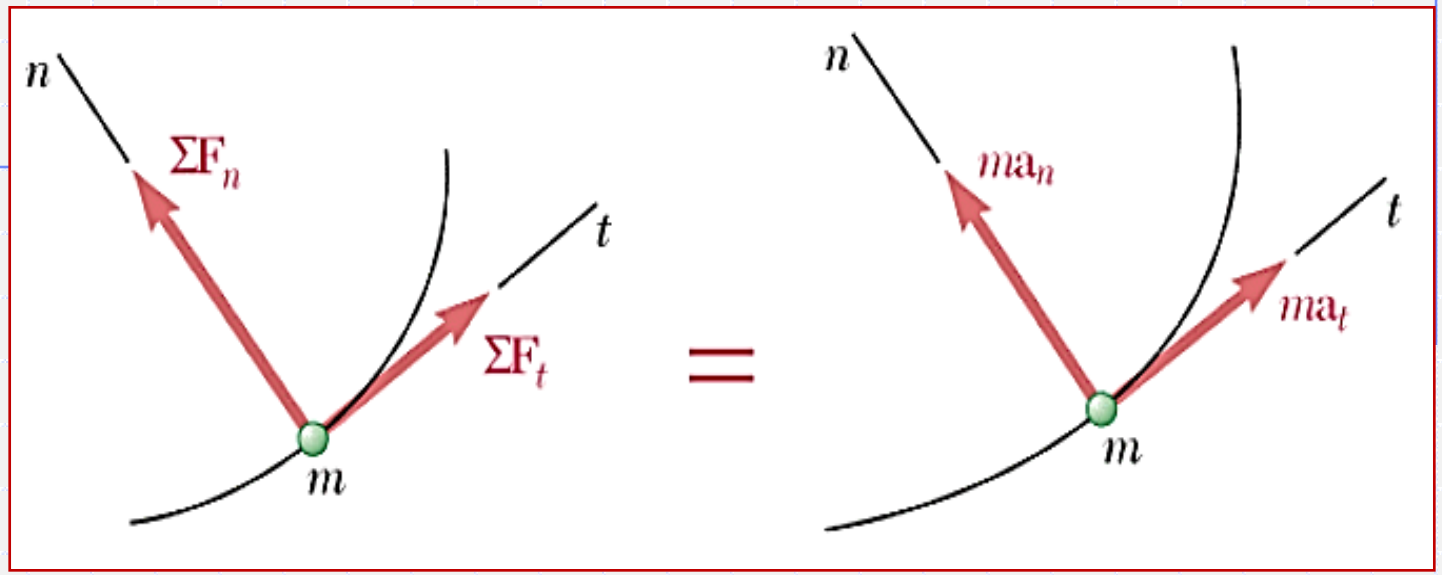
$$\sum F_x = ma_x = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = ma_y = m\ddot{y}$$

$$\sum F_z = ma_z = m\ddot{z}$$



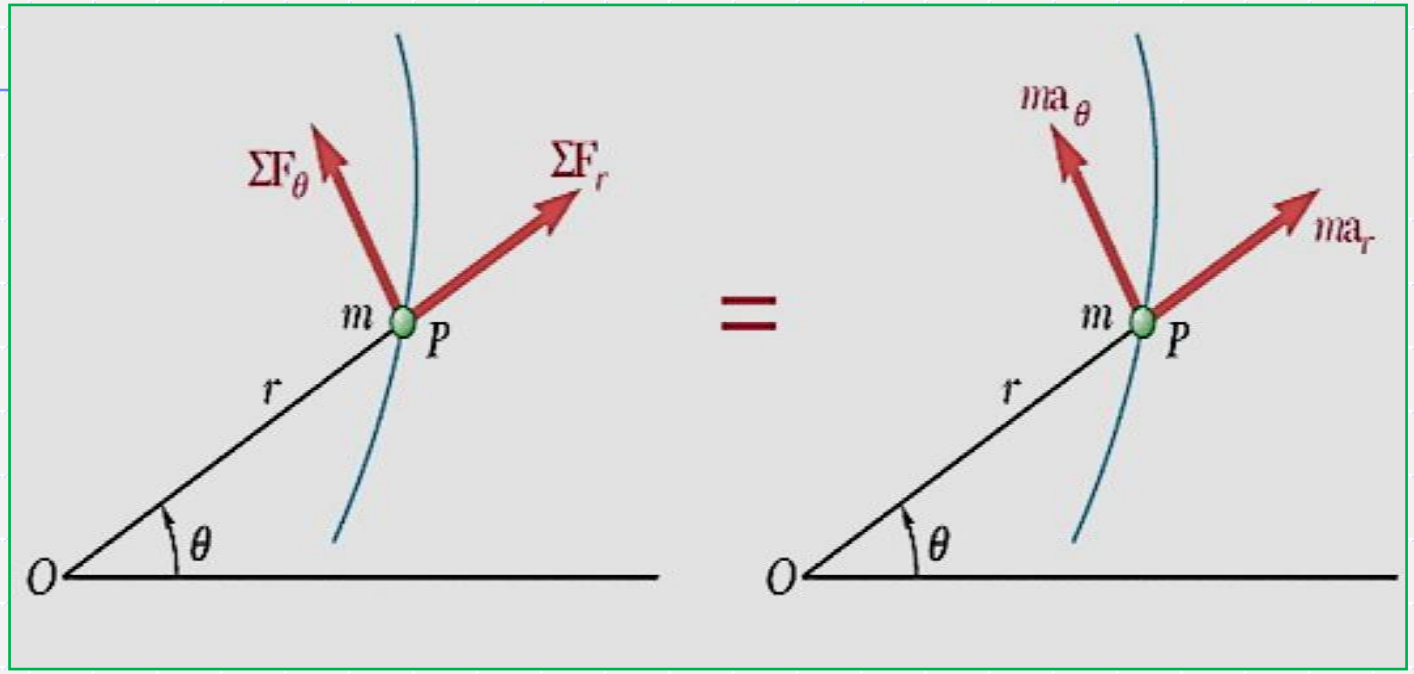
مختصات مؤلفه های مماسی و عمودی:



$$\Sigma F_t = ma_t = m\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\Sigma F_n = ma_n = m\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$$

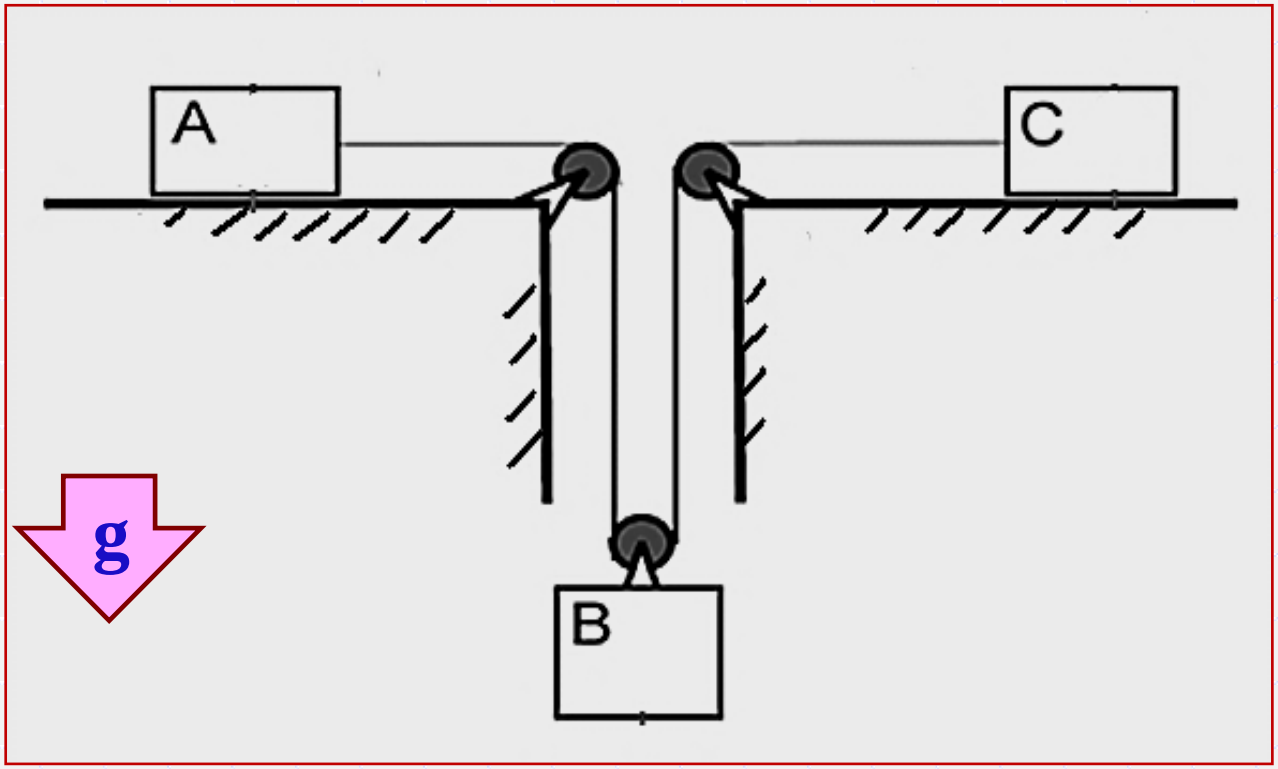
مختصات قطبی (مختصات مؤلفه های شعاعی و عرضی):



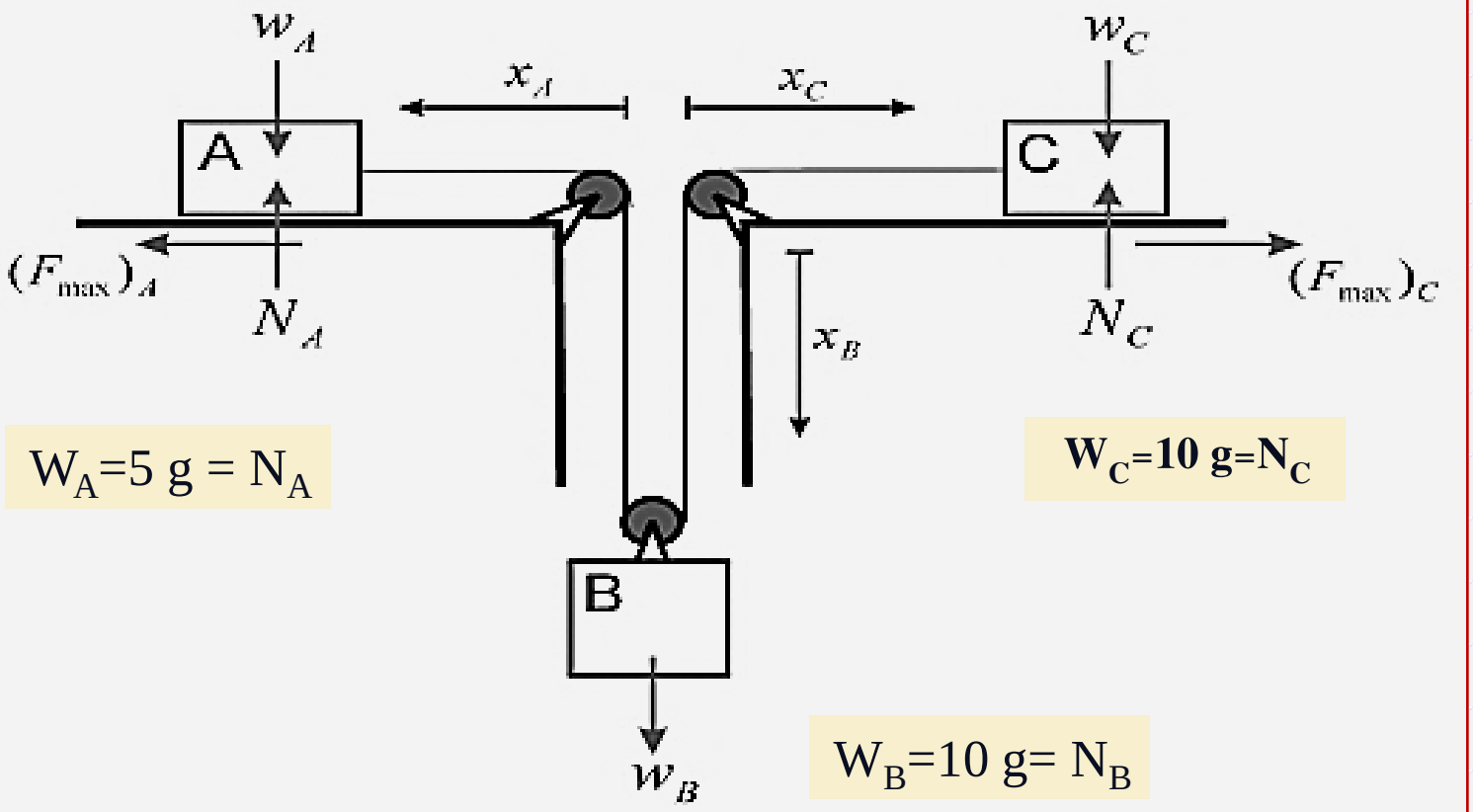
$$\Sigma F_r = m\,a_r = m\,(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\Sigma F_\theta = m\,a_\theta = m\,(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

مثال : سه وزنه به جرم های $m_A=5\ kg$ $m_B=10\ kg$ $m_C=10\ kg$ مطابق شکل زیر به هم متّصل می باشند. اگر ضرایب اصطکاک بین وزنه های A و C با سطوح افقی $\mu_K=0.20$, $\mu_S=0.24$ باشند: مطلوبست وضعیت سیستم، مقدارکشش در کابل و شتاب جرمها.



حل :



W_A=5 g = N_A

W_C=10 g=N_C

W_B=10 g= N_B

$$F_{max} = (F_{max})_A + (F_{max})_C = (N_A + N_C)\mu_S$$

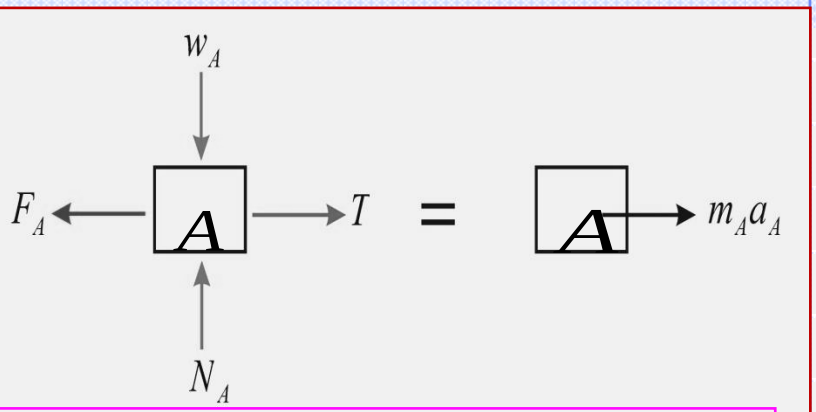
$$= 0.24(5 + 10)\ g = 0.24\ (15g) < 10\ g = W_B$$

پس وزنه ها حرکت می کنند.

$$+\rightarrow \Sigma \vec{F} = +\rightarrow m\vec{a}$$

$$T - F_A = m_A\, a_A$$

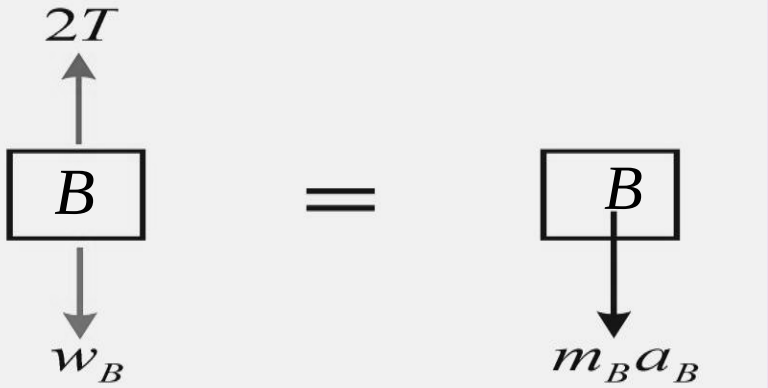
$$T - 0.2(5g) = 5a_A$$



$$+\downarrow \Sigma \vec{F} = +\downarrow m\,\vec{a}$$

$$W_B - 2T = m_B\, a_B$$

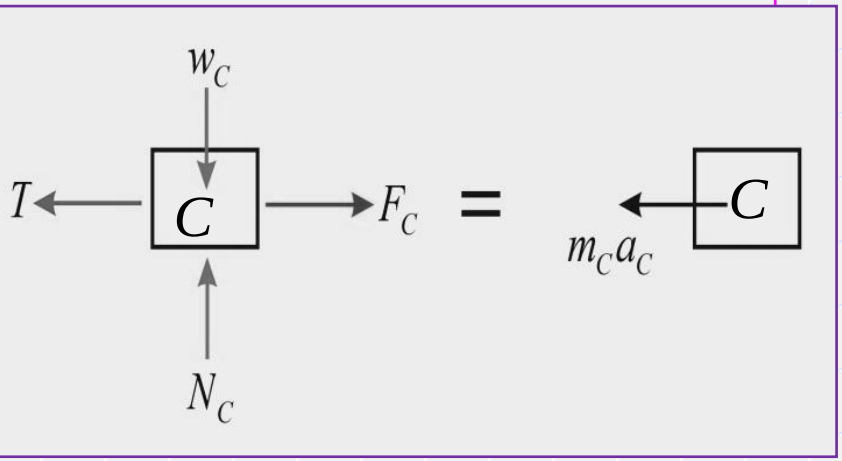
$$10g - 2T = 10a_B$$



$$+\leftarrow \Sigma \vec{F} = +\leftarrow m\,\vec{a}$$

$$T - F_C = m_C\, a_C$$

$$T - 0.2(10g) = 10\, a_C$$

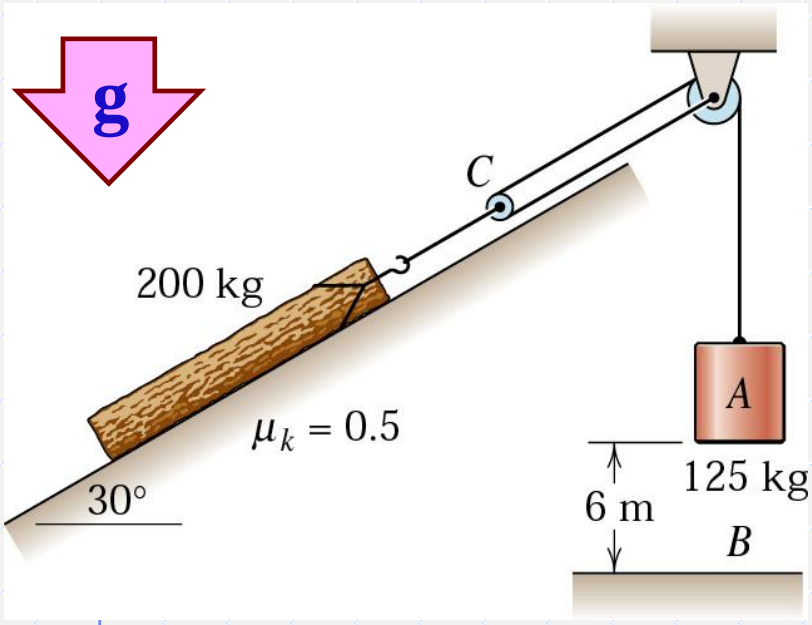


استفاده از طول ثابت کابل :

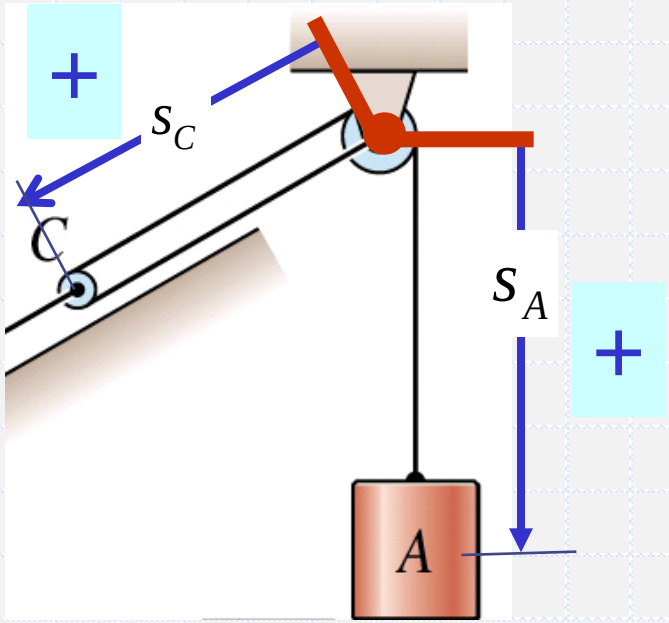
$$-x_A + 2x_B - x_C = C$$
$$-v_A + 2v_B - v_C = 0$$
$$-a_A + 2a_B - a_C = 0 \quad \Rightarrow \quad a_B = 1/2(a_A + a_C)$$

با استفاده از چهار معادله بالا داریم:

$$a_A = 4.76 \frac{m}{s^2} \rightarrow$$
$$a_B = 3.08 \frac{m}{s^2} \downarrow$$
$$a_C = 1.4 \frac{m}{s^2} \leftarrow$$
$$T = 33.6\ N$$



مثال: بلوک A از حالت ساکن شروع به حرکت میکند و قطعه چوب 200 کیلوگرمی را به سمت بالا به حرکت در می آورد. مطلوبست: سرعت بلوک در هنگام برخورد با زمین.

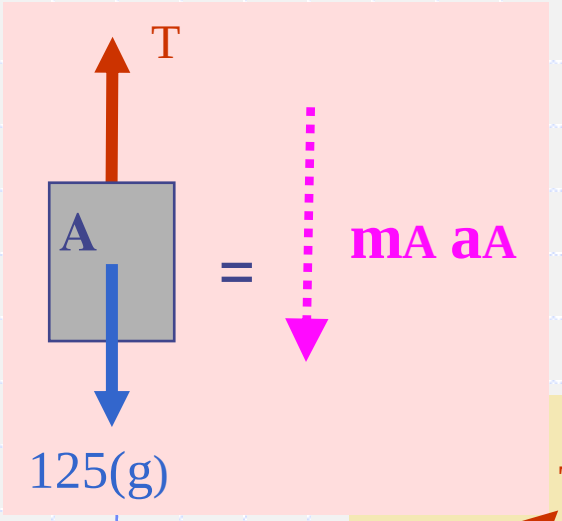


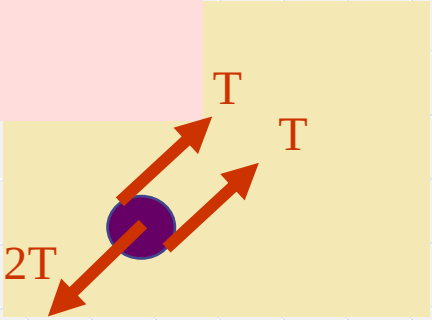
$$L = 2s_C + s_A + \text{constant}$$

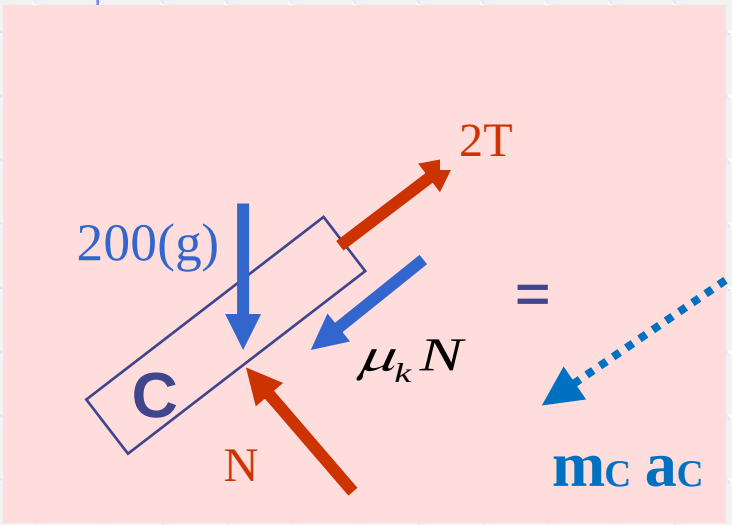
$$2v_C + v_A = 0$$

$$2a_C + a_A = 0$$

$$2a_C \ (\nearrow) = a_A \quad (\downarrow)$$







$$N - 200(9.81)\cos\theta = 0$$

$$-2T + 200(9.81)\sin\theta + 0.5N = 200a_C$$

$$125(9.81) - T = ma_A$$

$$2a_C + a_A = 0$$

$$T = 1004 \text{ N}$$

$$a_C = -0.888 \text{ m/s}^2$$

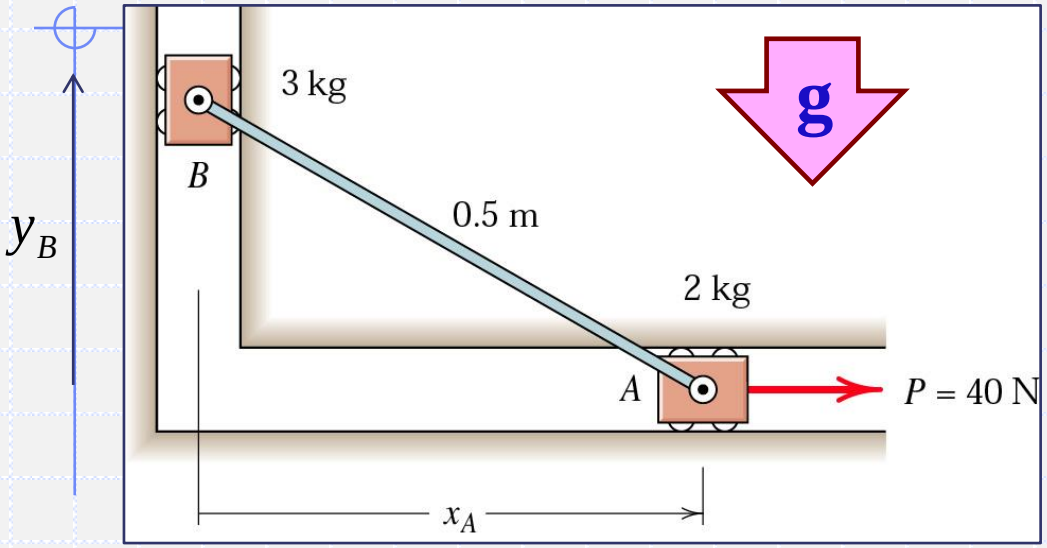
$$a_A = 1.777 \text{ m/s}^2$$

$$vdv = ads$$

$$v_A^2 = 2a_A s \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{2(1.777)(6)}$$

مثال : شتاب هر دو لغزنده را در موقعیت نشان داده شده بدست بیاورید. از جرم میله صرفنظر میگردد.

$y_B = 0.3\,m \qquad x_A = 0.4\,m \qquad v_A = 0.9\ m/s \rightarrow$

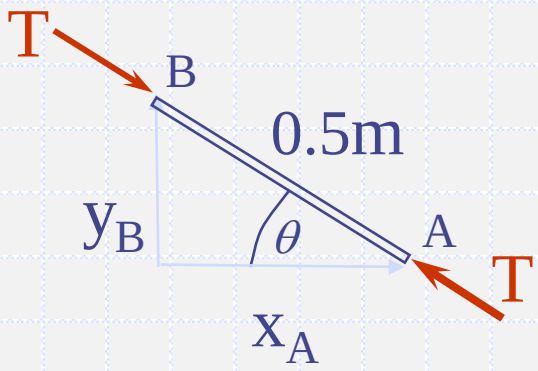


$$x_A^2 + y_B^2 = 0.5^2$$

$$x_A \dot{x}_A + y_B \dot{y}_B = 0$$

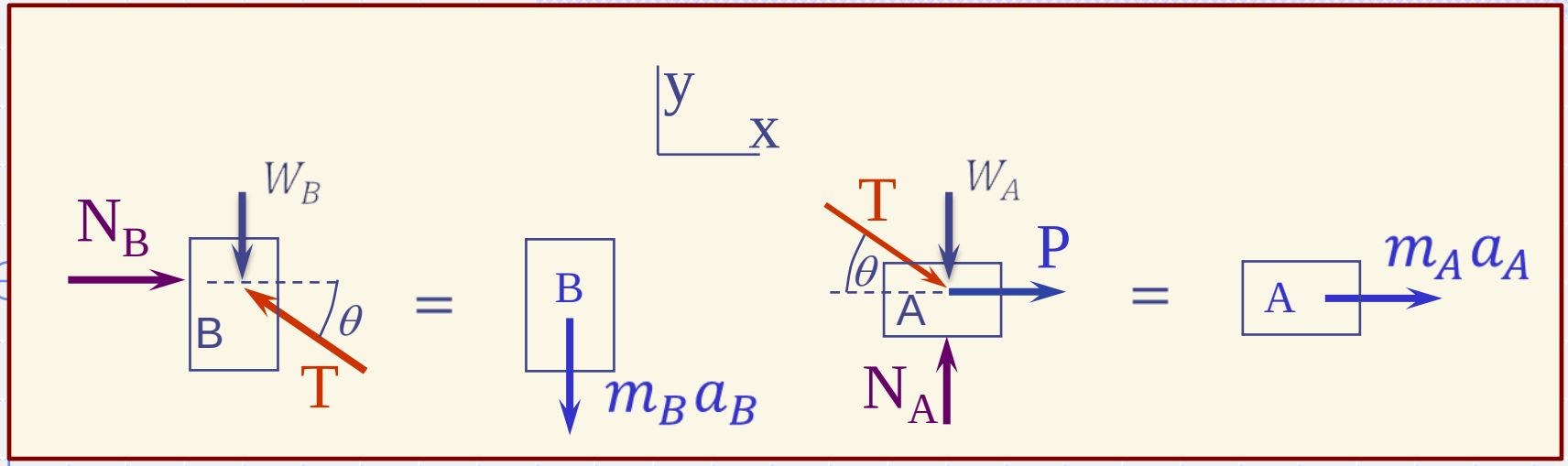
$$\dot{y}_B = v_B = -1.2$$

$$x_A \ddot{x}_A + \dot{x}_A^2 + y_B \ddot{y}_B + \dot{y}_B^2 = 0$$



در موقعیت فعلی:

$$0.4\,a_A + 0.9^2 + 0.3a_B + (-1.2)^2 = 0$$



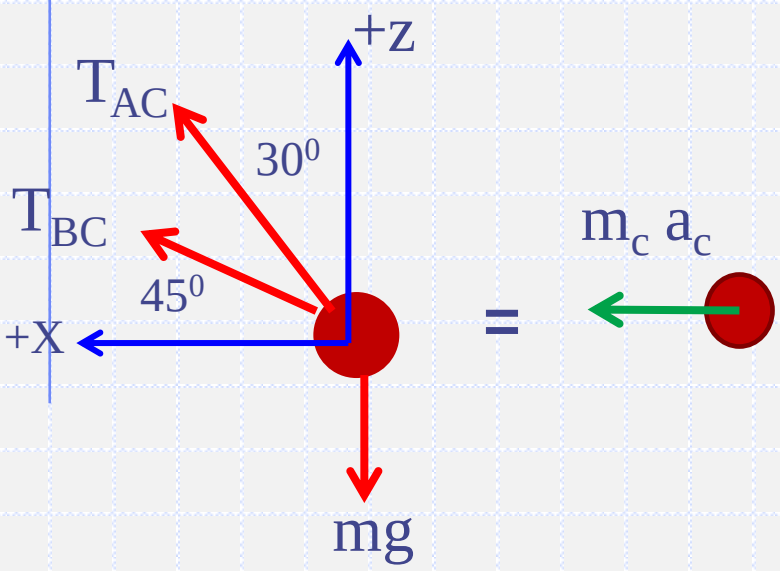
$$\sum F_y = T\sin\theta - W_B = m_B a_B \qquad \sum F_x = T\cos\theta + P = m_A a_A$$

$$0.6\,T = 3\,a_B \qquad 0.8\,T + 40 = 2\,a_A$$

$$0.4\,a_A + 0.9^2 + 0.3a_B + (-1.2)^2 = 0$$

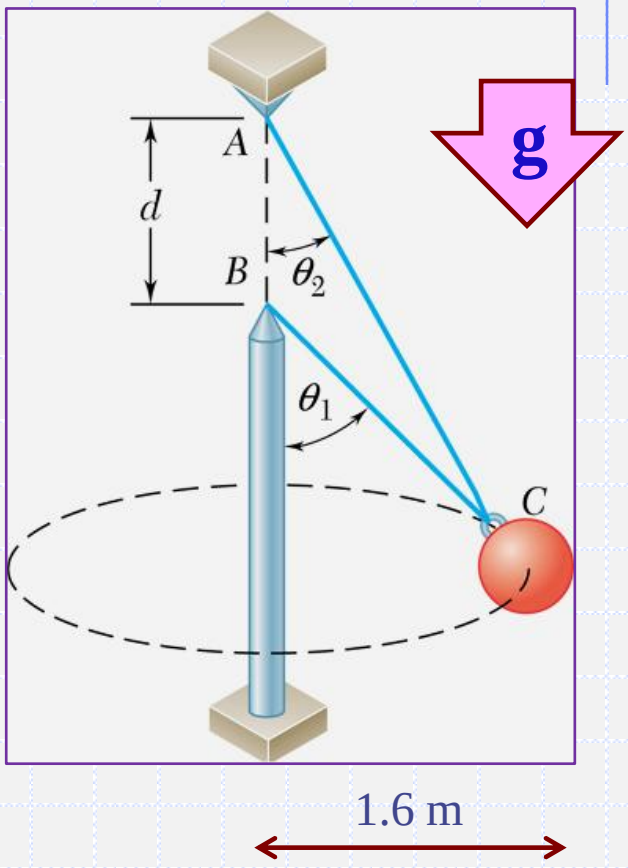
$$T = -46.6\ N \qquad a_A = 1.36\ \text{m/s}^2 \qquad a_B = -9.32\ \text{m/s}^2$$

مثال : اگر جسم C به جرم ۵ kg با سرعت ثابت v در حال دوران حول میله قائم باشد ، مطلوبست حدود سرعت ثابت v که همواره هر دو کابل BC و AC در کشش باشند. $g=9.81\ m/s^2$



$\theta_1 = 45^\circ$

$\theta_2 = 30^\circ$



$$V = cte \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{1.6}$$

$$\begin{cases} +\leftarrow \sum F_x = m_c a_c \;\Rightarrow\; T_{AC} Sin30 + T_{BC} Sin45 = \dfrac{5}{1.6} v^2 \\ +\uparrow \sum F_z = 0 \;\Rightarrow\; T_{AC} Cos30 + T_{BC} \cos 45 - 5g = 0 \end{cases}$$

$$T_{AC} \sin 30° + T_{BC} \sin 45° = \frac{5}{1.6} v^2 \;\Rightarrow\; T_{AC} = 0 \;\Rightarrow\; \tan 45° = \frac{v^2}{1.6g} \Rightarrow v = 3.96\, m/s$$

$$T_{AC} \cos 30° + T_{BC} \cos 45° = 5g \;\Rightarrow\; T_{BC} = 0 \;\Rightarrow\; \tan 30° = \frac{v^2}{1.6g} \Rightarrow v = 3.01\, m/s$$

$$3.01\, m/s < v < 3.96\ m/s$$

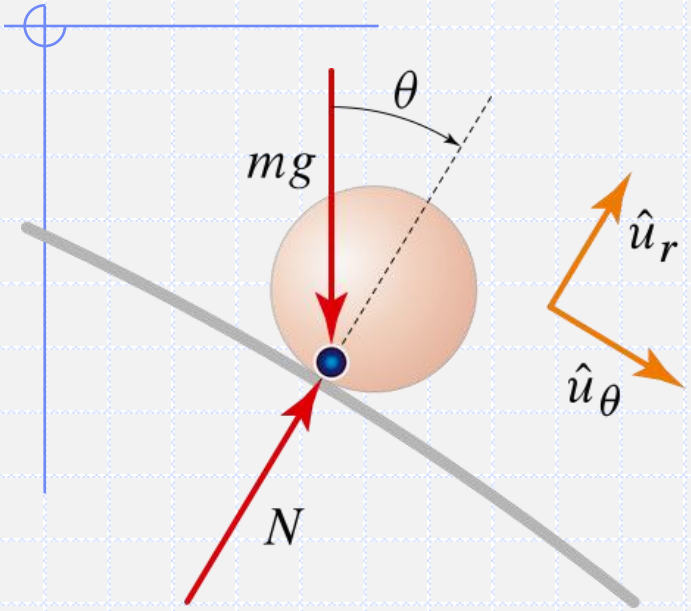
حال اگر V کمتر یا بیشتر از بازه بالا باشد ، باید کابل با کشش منفی را حذف کرده و معادلات را از اول بنویسیم و خواهیم داشت:

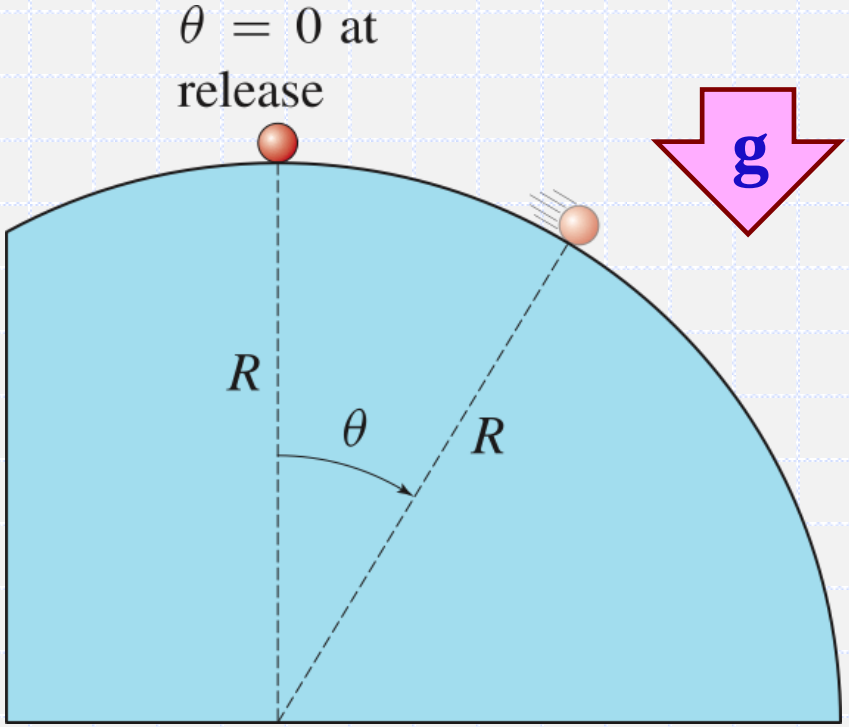
$$v = 4 \Rightarrow T_{AC} < 0$$

$$v = 3 \Rightarrow T_{BC} < 0$$

مثال : اگر گلوله مقابل را کمی به سمت راست روی سطح صیقلی جابجا و بعد رها کنیم، مطلوبست: زاویه ای که گلوله از سطح کاملاً صیقلی جدا خواهد گردید.

جرم گلوله = m





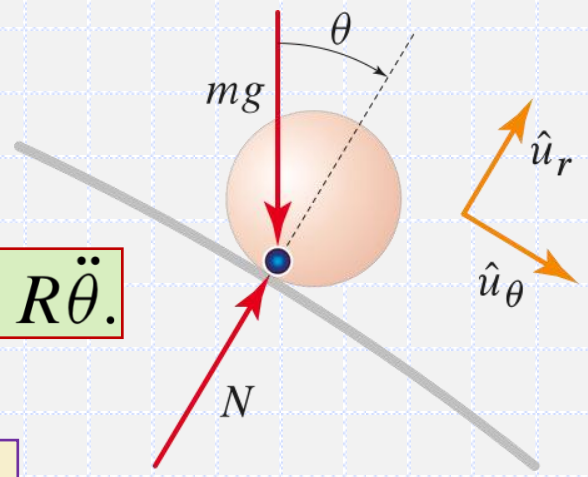
$$\sum F_r: \quad N - mg\cos\theta = ma_r,$$
$$\sum F_\theta: \quad mg\sin\theta = ma_\theta.$$

شرایط جدا شدگی از سطح:

$N = 0$

R = Const. $\rightarrow$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -R\dot{\theta}^2,$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = R\ddot{\theta}.$$



$$N - mg\cos\theta = -mR\dot{\theta}^2 \quad \text{and} \quad g\sin\theta = R\ddot{\theta}.$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta.$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \frac{g}{R}\sin\theta\, d\theta,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{R}\cos\theta\Big|_0^{\theta} = \frac{g}{R}(1-\cos\theta),$$
$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta).$$

$$N - mg\cos\theta = -mR\dot{\theta}^2.$$

$$\dot{\theta}^2 = 2g(1-\cos\theta)/R.$$

$$N = mg(3\cos\theta - 2).$$

$$3\cos\theta_s - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_s = \frac{2}{3}$$

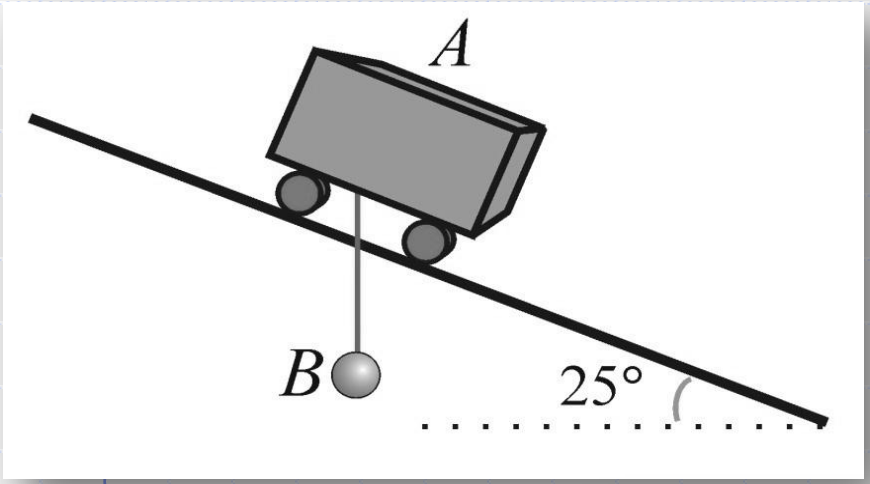
$$\Rightarrow \quad \theta_s = \pm 48.2^\circ$$

θ_s = زاویه جدا شدگی از سطح باشد
و اعمال شرایط مسئله N = 0

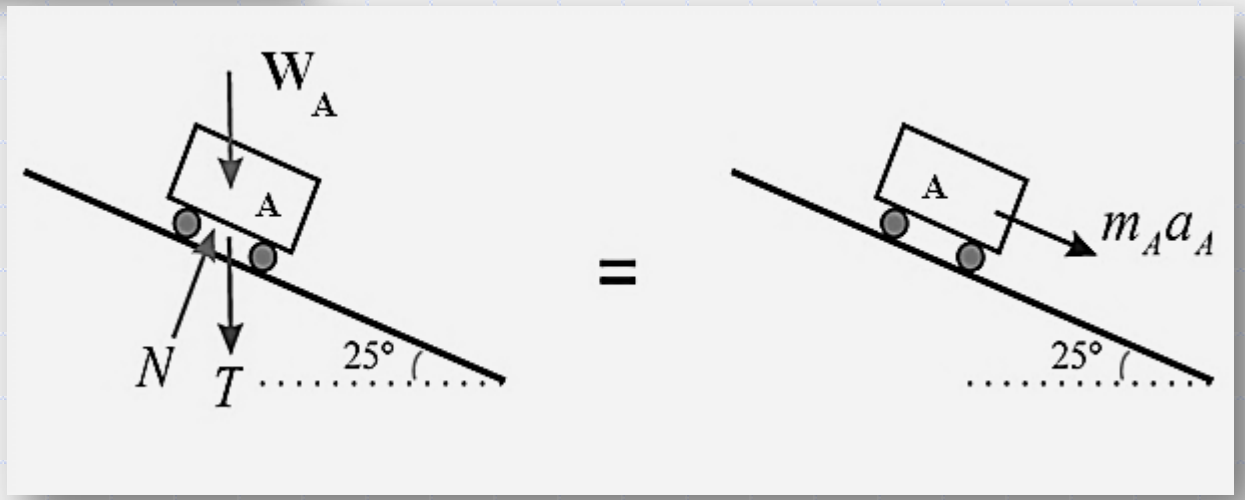
$$\theta_s = 48.2^\circ.$$

مثال : اگر سیستم فوق از حالت سکون شروع به حرکت کند؛ شتاب جسم A و کشش درکابل درلحظه شروع حرکت را به دست آورید.

$$m_A = 20\ kg \quad m_B = 15\ kg$$

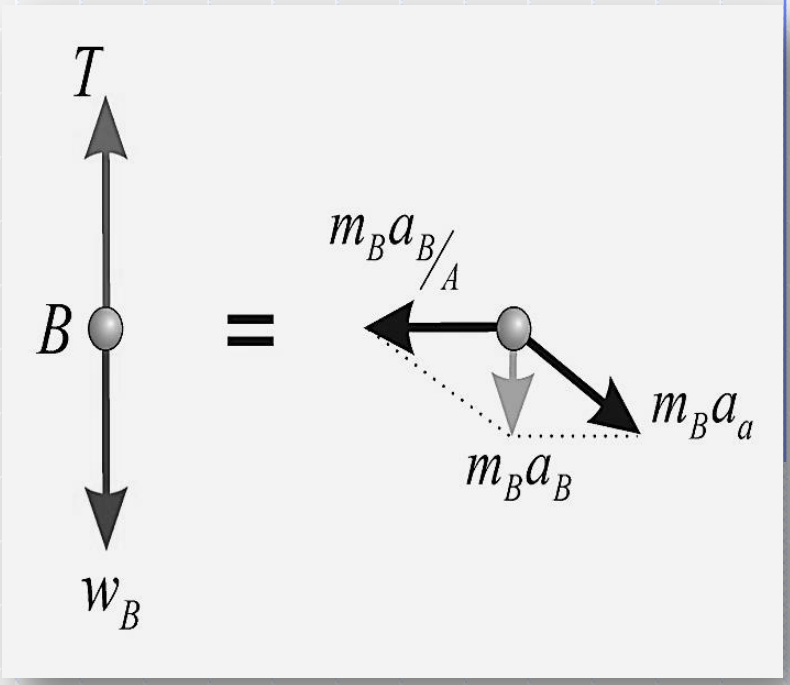


حل :



$$+\searrow \sum F = +\searrow m_A a_A$$

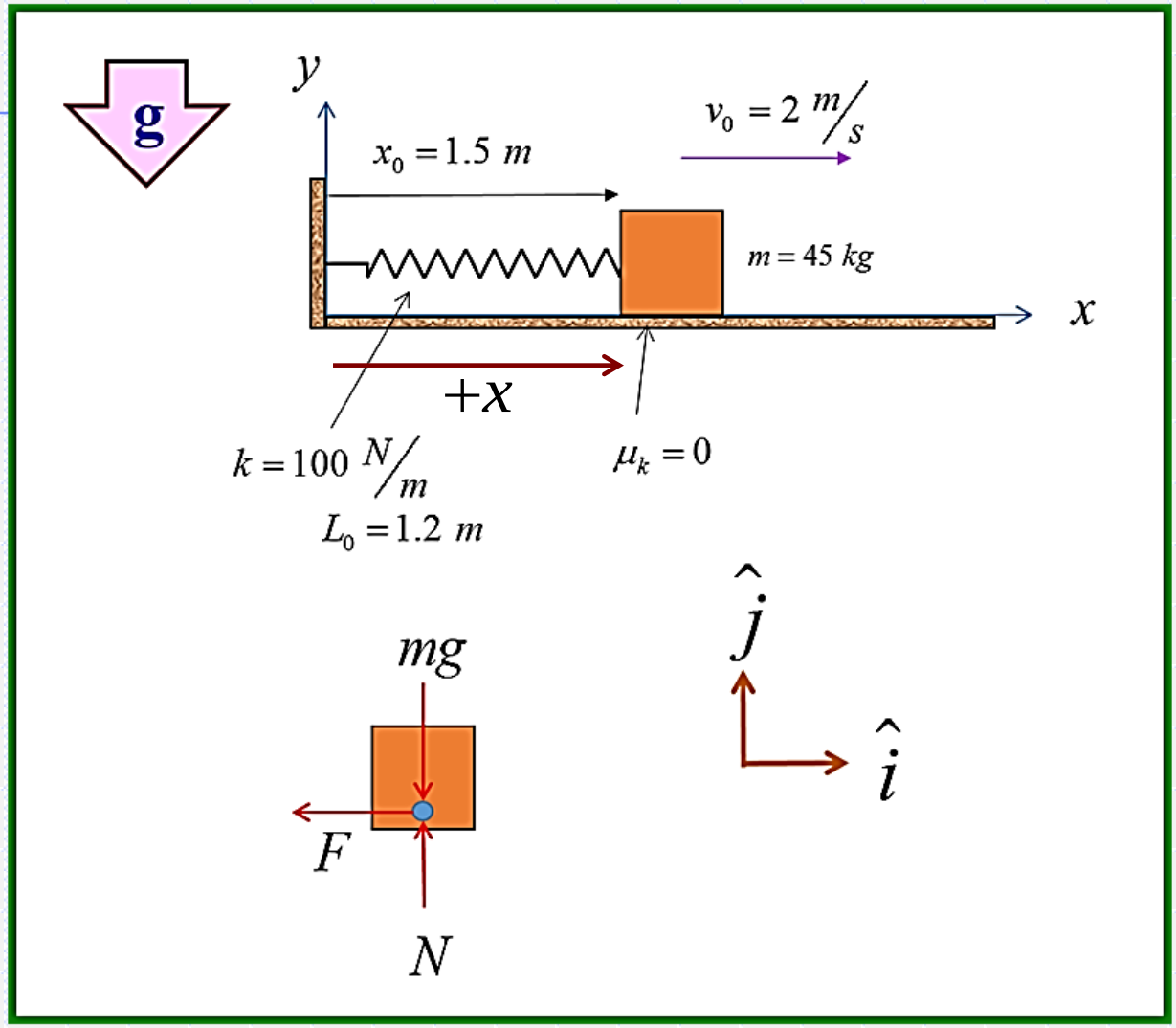
$$NCos90 + (W_A + T)\sin 25° = 20 a_A$$



$$\begin{cases} +\leftarrow \sum F = ma \quad \Rightarrow \quad 0 = m_B a_{B/A} - m_B a_A \cos 25 \\ +\downarrow \sum F = ma \quad \Rightarrow \quad W_B - T = m_B a_A \sin 25 \end{cases}$$

$$a_A = 6.4 \quad (m/s^2) \qquad T = 106.6 \quad (N) \qquad a_{B/A} = 5.8 \quad (m/s^2)$$

مثال: الف) مطلوبست معادله حرکت بلوک متصل به فنر بصورت تابعی از زمان.



$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \Rightarrow -k(x-L_0) = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \Rightarrow mg = N \end{cases}$$

معادله 1

$$a_x = \ddot{x}$$

$$\text{معادله 1} \Rightarrow -kx + kL_0 = m\ddot{x} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + kx = kL_0}$$

معادله 2

معادله حرکت
Equation of Motion

جواب عمومی معادله 2

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + L_0 \;,\; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.49$$

or

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \varphi) + L_0 \;,\; \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$$

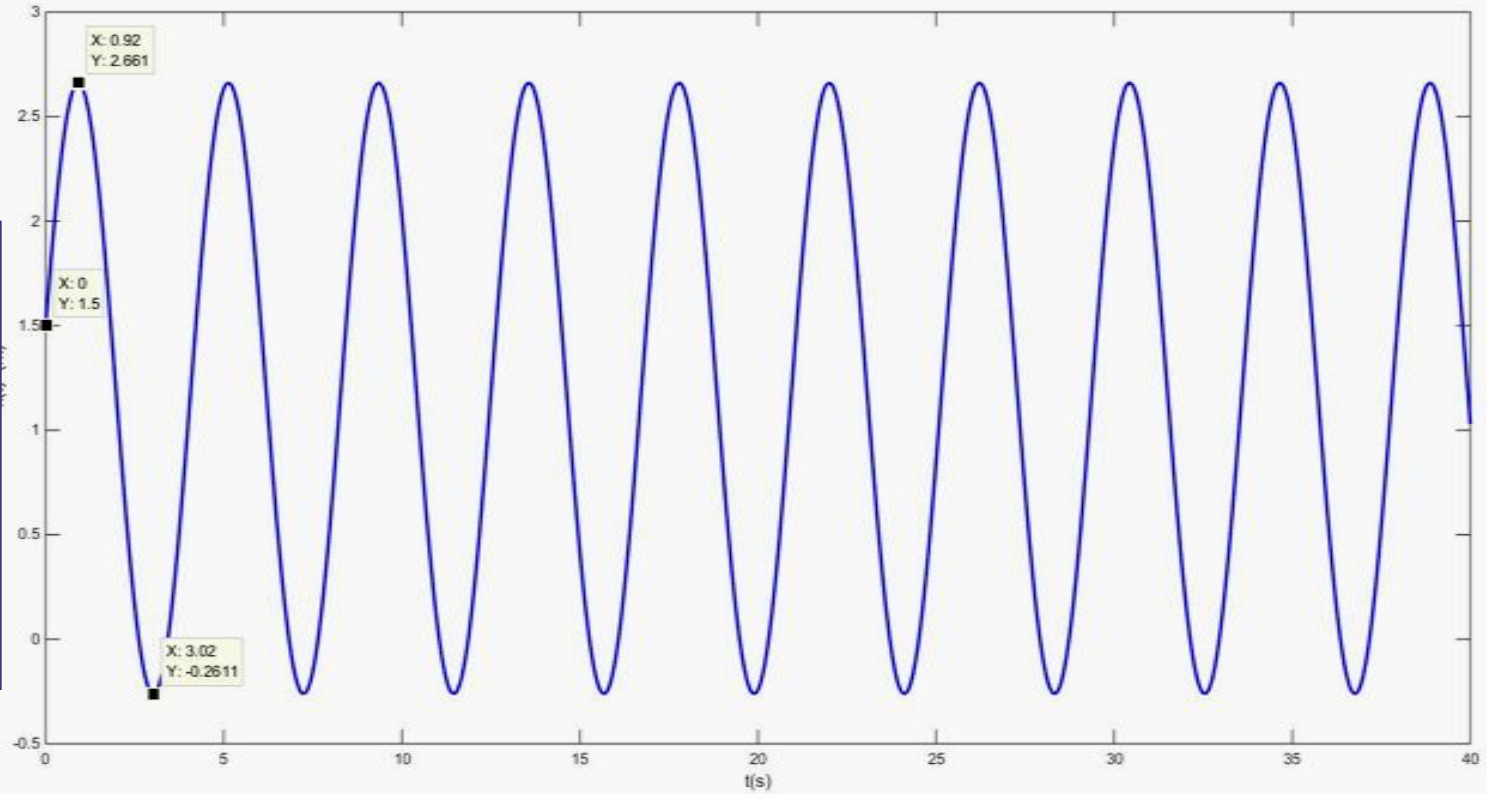
اعمال شرایط اولیه :

$$\begin{cases} x_0 = 1.5 = x(0) \Rightarrow B + L_0 = 1.5 \Rightarrow B = 0.3 \\ v_0 = 2 = \dot{x}(0) \Rightarrow A\omega = 2 \Rightarrow A = \dfrac{2}{\omega} = 1.34 \end{cases}$$

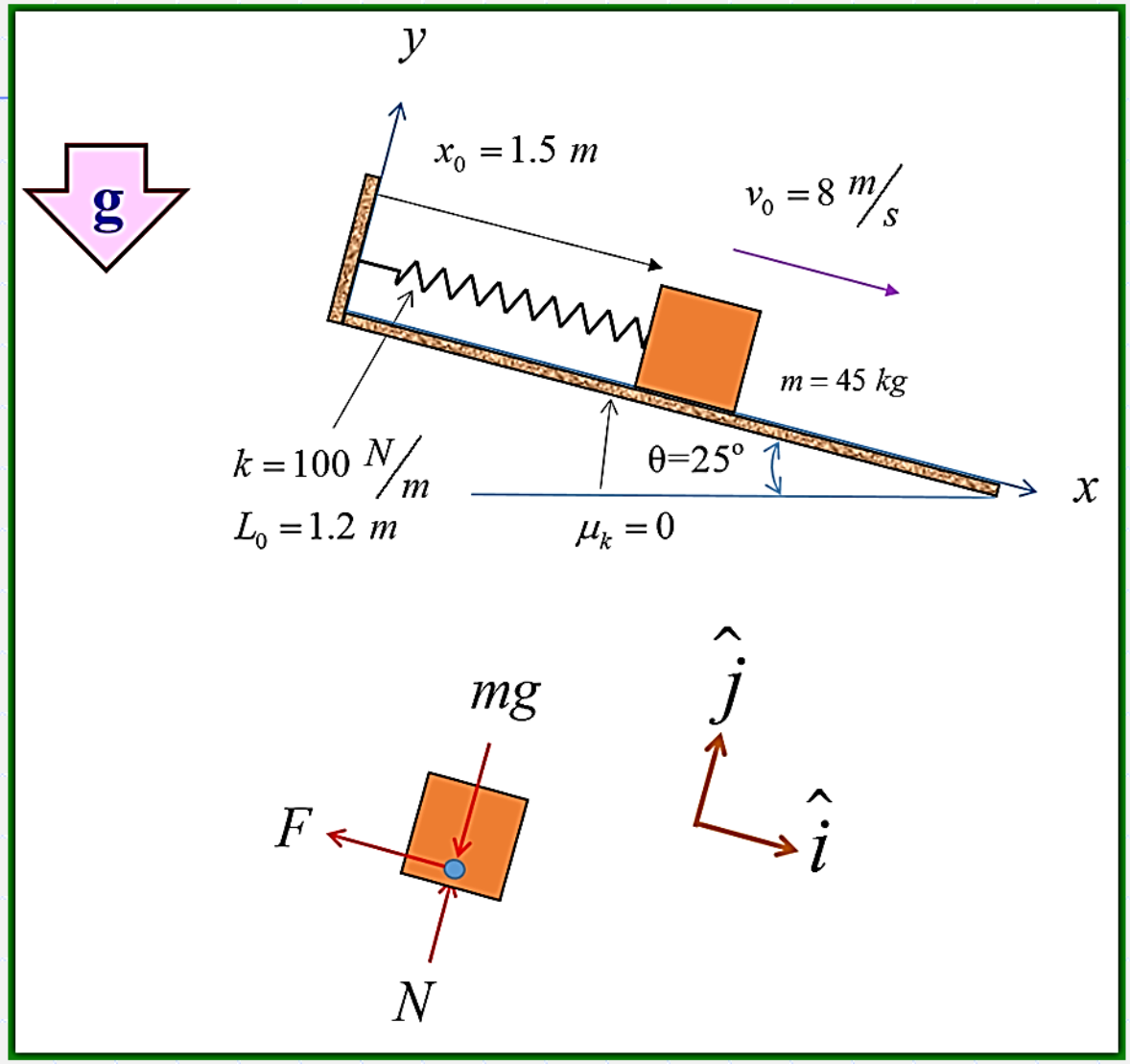
$$\Rightarrow x(t) = 1.34\sin(1.49t) + 0.3\cos(1.49t) + 1.2$$

$$x(t) = 1.34\sin(1.49t) + 0.3\cos(1.49t) + 1.2$$

$$\begin{cases} x_0 = 1.5\ m \\ v_0 = 2\ {}^{m}\!/_{s} \\ k = 100\ {}^{N}\!/_{m} \\ L = 1.2\ m \\ \mu = 0 \\ \theta = 0^{\circ} \\ m = 45\ kg \end{cases}$$



ب) مطلوبست معادله حرکت بلوک متصل به فنر بصورت تابعی از زمان.



حل :

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \Rightarrow mg\sin\theta - F_s = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \Rightarrow N - mg\cos\theta = ma_y \Rightarrow N = mg\cos\theta \end{cases}$$

$$F_s = k(x - L_0) \Rightarrow mg\sin\theta - kx + kL_0 = ma_x = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = mg\sin\theta + kL_0$$

معادله حرکت

Equation of Motion

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + \frac{mg}{k}\sin\theta + L_0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

or

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \varphi) + \frac{mg}{k}\sin\theta + L_0 \ , \ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$$

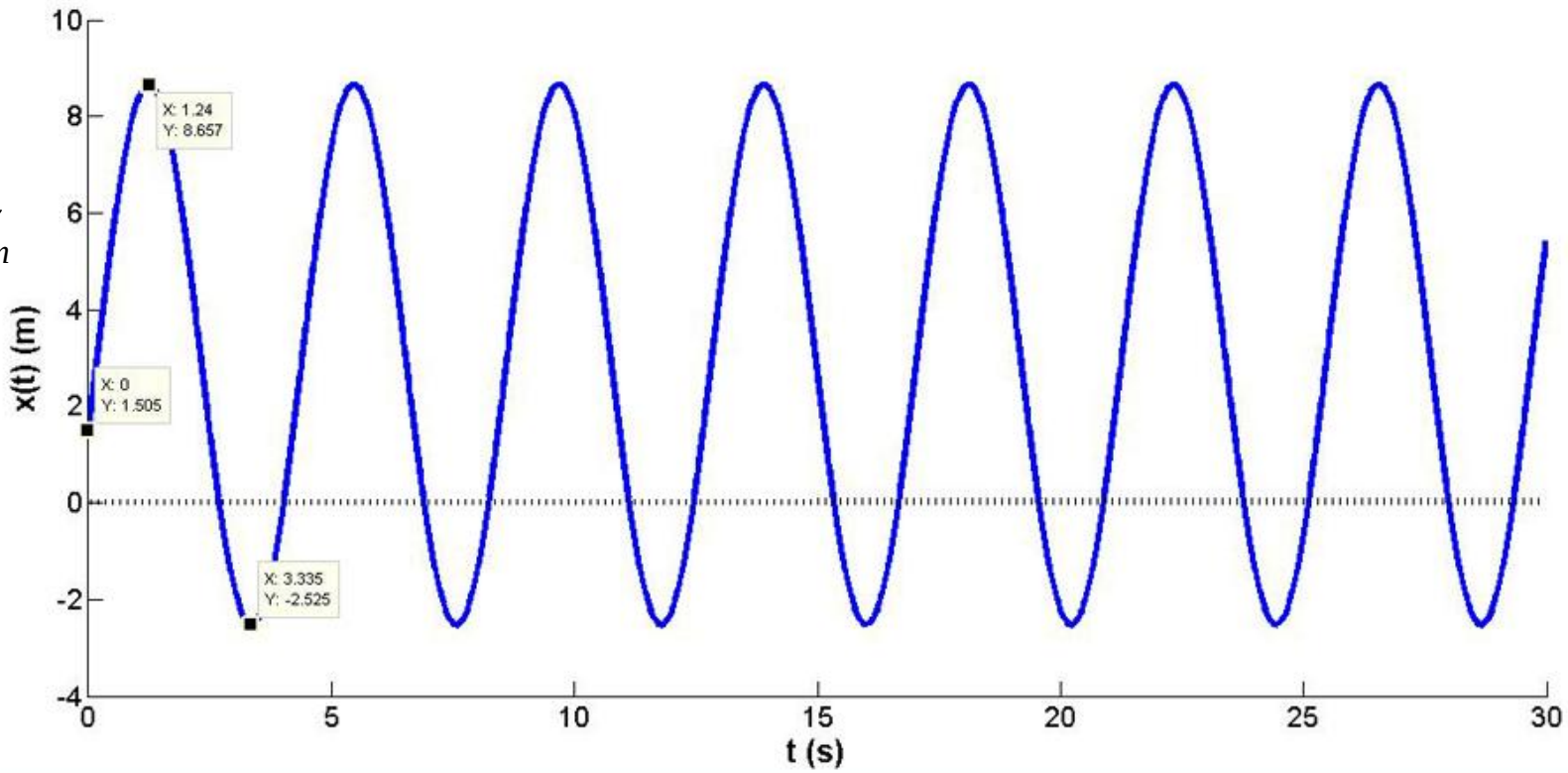
اعمال شرایط اولیه :

$$\begin{cases} x_0 = 1.5 \Rightarrow x(0) = 1.5 = B + \dfrac{mg\sin\theta}{k} + L_0 \\ v_0 = 8 \Rightarrow \dot{x}(0) = 8 = A\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1.56 \\ A = 5.37 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = 5.37\sin(1.49t) - 1.56\cos(1.49t) + 3.065$$

$$x(t) = 5.37\sin(1.49t) - 1.56\cos(1.49t) + 3.065$$

$$\begin{cases} x_0 = 1.5\ m \\ v_0 = 8\ m/s \\ v_0 = 8\ m/s \\ k = 100\ N/m \\ L = 1.2\ m \\ \mu = 0 \end{cases}$$



در حالت واقعی زمانی که $\mu_k \neq 0$ ، جواب عمومی معادله $x(t)$ بصورت زیر خواهد شد :

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + \frac{mg}{k}(\sin\theta - \mu_k \cos\theta) + L_0$$

or

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \alpha) + \frac{mg}{k}(\sin\theta - \mu_k \cos\theta) + L_0, \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$$

زمانی که $\mu_k \neq 0$ ، ارتعاشات جسم میرا می شود.

- **اندازه حرکت زاویه ای (لنگر حرکتی یا ممنتوم زاویه ای) :**

گشتاور بردار mv حول O را گشتاور اندازه حرکت , یا اندازه حرکت زاویه ای ذره , حول نقطه O در آن لحظه می نامند .

موقعیت جرم $\vec{r} =$

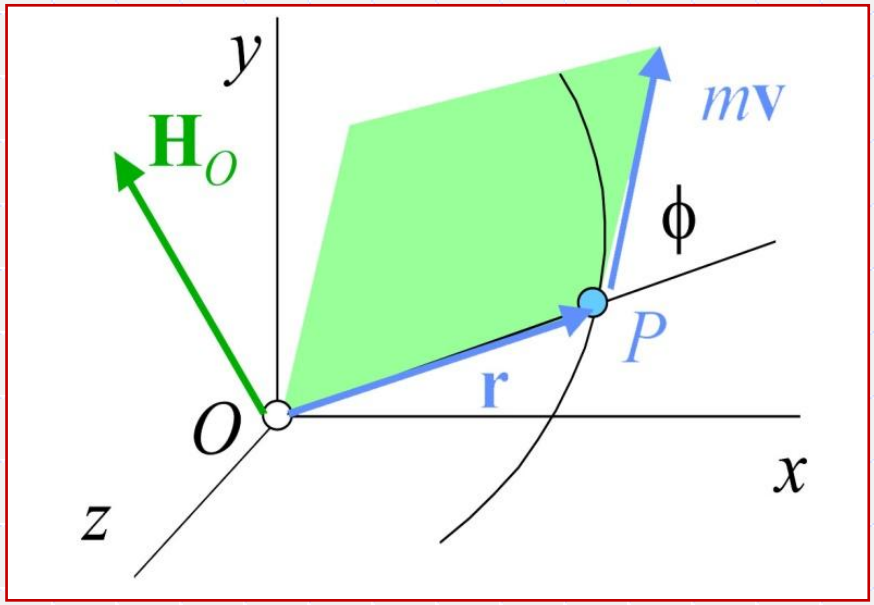
ممنتوم خطی $\vec{L} = m\vec{v} =$

ممنتوم زاویه ای:

$$\vec{H}_o = \vec{r} \times m\vec{v} =$$

$$H_o = r(mv)\sin\varphi$$

$$\vec{H}_o \perp (\vec{r}, m\vec{v})$$



واحد ممنتوم زاویه ای :

$SI: \quad N.m.s$

$FPS: \quad Ib.ft.s$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad , \quad m\vec{V} = m\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{H}_o = m\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{H}_o = m\left(yv_z - zv_y\right)\vec{i} + m\left(zv_x - xv_z\right)\vec{j} + m\left(xv_y - yv_x\right)\vec{k}$$

$$\vec{H}_o = H_x\vec{i} + H_y\vec{j} + H_z\vec{k}$$

$$H_x = m\left(yv_z - zv_y\right)$$

$$H_y = m\left(zv_x - xv_z\right)$$

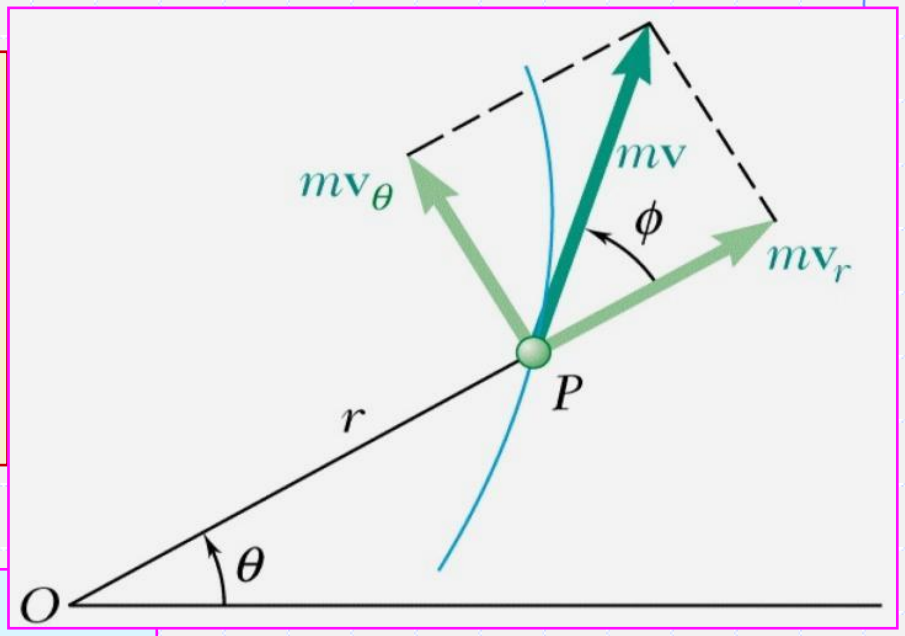
$$H_z = m\left(xv_y - yv_x\right)$$

$$\vec{H}_O = H_z\vec{k} = m\left(xv_y - yv_x\right)\vec{k}$$

اگر حرکت در صفحه xy باشد؛ داریم :

$$\vec{H}_o = \vec{r}\times m\vec{v} \Rightarrow H_o = r\ mv\sin\phi$$

$$\left.\begin{aligned} H_o &= rmv_\theta \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow H_o = mr^2\dot{\theta}$$



$$\vec{H}_o = \vec{r}\times m\vec{v}$$

$$\dot{\vec{H}}_o = \frac{d(\vec{r}\times m\vec{v})}{dt} = \vec{v}\times m\vec{v} + \vec{r}\times\frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

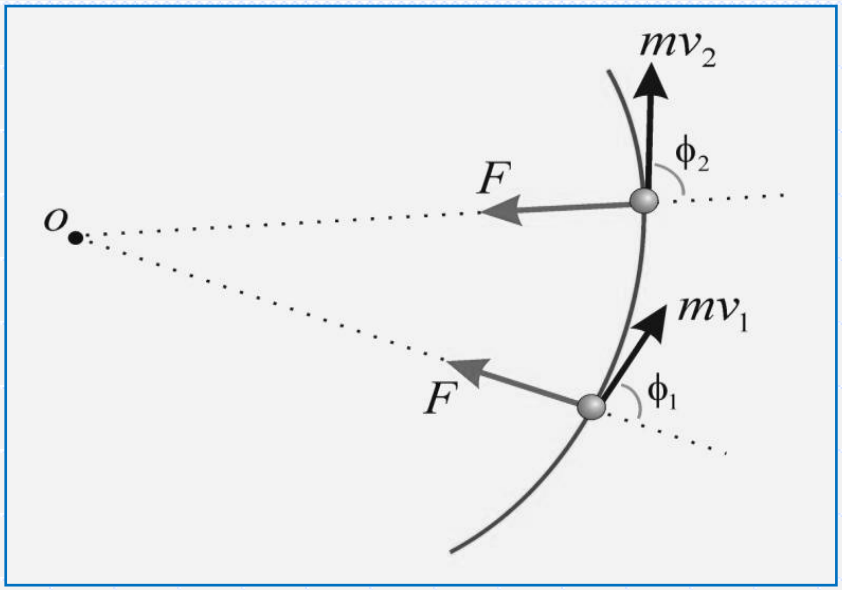
$$= 0 + \vec{r}\times(m\vec{a}) = \vec{r}\times(\sum\vec{F})$$

$$\dot{\vec{H}}_o = \sum\vec{M}_o$$

$$\dot{\vec{H}}_o = \sum\vec{M}_o$$

• حرکت تحت اثر نیروی مرکزی (Central Force):

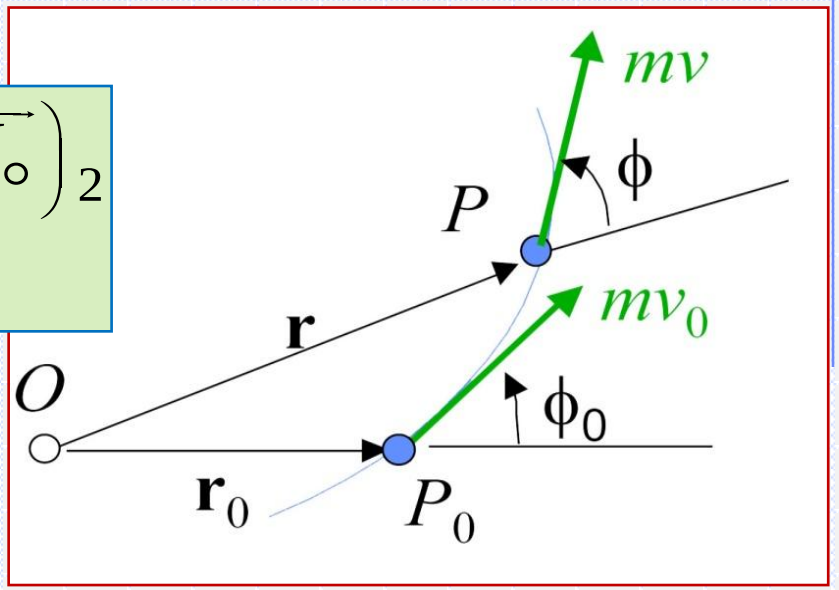
اگر نیروئی به ذره ای وارد گردد که همواره در حین حرکت , ذره به سمت یک نقطه خاص و یا در خلاف جهت آن در حرکت باشد ، به آن حرکت , حرکت تحت اثر نیروی مرکزی می گویند.



حرکت تحت اثر نیروی مرکزی (حفظ ممنتوم زاویه ای) :

$$\sum \overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{\dot{H}_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\overrightarrow{H_o}\right)_1 = \left(\overrightarrow{H_o}\right)_2$$

$$r_1 m v_1 \sin\phi_1 = r_2 m v_2 \sin\phi_2$$



حالاتهای خاص:

- حفظ ممنتوم خطی

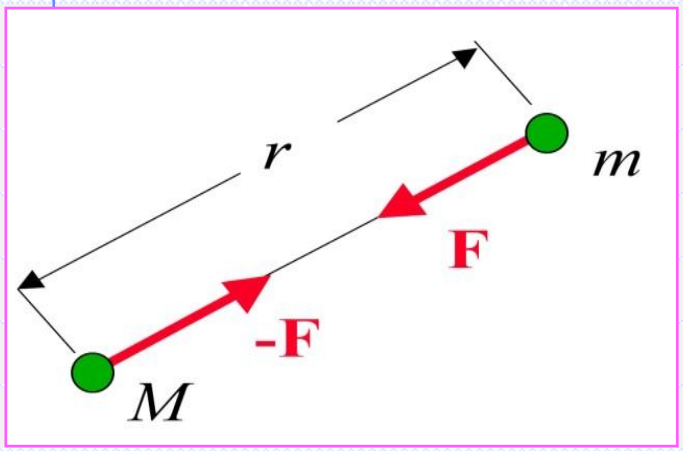
$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{L}} \Rightarrow \text{if} \quad \sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

- حفظ ممنتوم زاویه ای

$$\sum \vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o \Rightarrow \text{if } \sum \vec{M}_o = 0 \quad \Rightarrow \dot{\vec{H}}_o = 0 \Rightarrow \left(\vec{H}_o\right)_1 = \left(\vec{H}_o\right)_2$$

- **قانون گرانش نیوتون :**

دو ذره به جرمهای m و M که به فاصله r از هم قرار دارند , یکدیگر را با نیروهای برابر و مخالف F و F– که در راستای خط واصل این دو ذره هستند , جذب می کنند .



$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

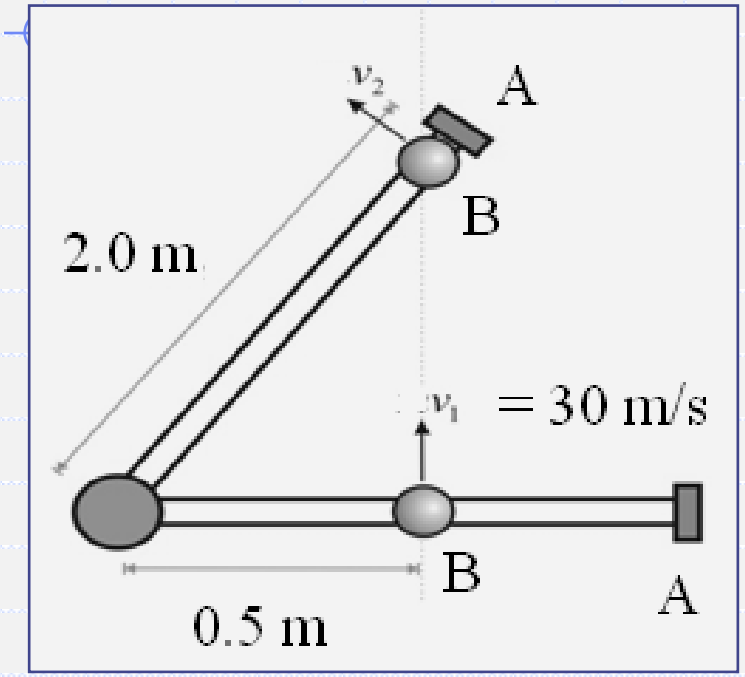
G = constant of gravitation

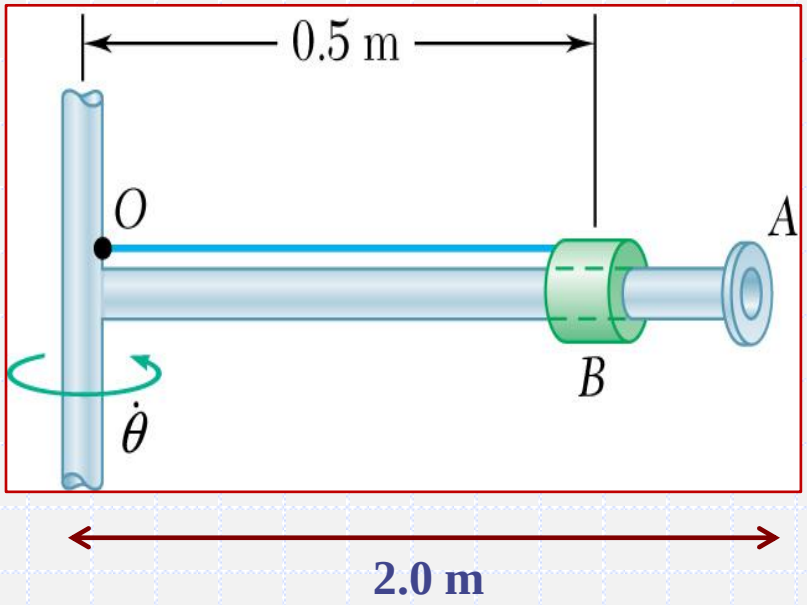
In the case of a body of mass *m* subjected to the gravitational attraction of the earth, the product *GM*, where *M* is the mass of the earth, is expressed as

$$GM = gR^2$$

where $g = 9.81\ m/s^2 = 32.2\ ft/s^2$
and *R* is the radius of the earth.

مثال : اگر جرم طوقه B برابر 4 kg و در حال دوران با سرعت ثابت 30 متر در ثانیه باشد و اگر از جرم میله و اصطکاک صرف نظر شود، سرعت طوقه به هنگام رسیدن به نقطه A پس از قطع کردن کابل را محاسبه کنید.





حل :

$$\sum \vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{H}_o\right)_1 = \left(\vec{H}_o\right)_2$$

$$0.5 \times \left(m v_1\right) = 2.0 \times \left(m v_2\right) \quad \Rightarrow \quad 0.5 \times 30 = 2.0 \times v_2$$

$$v_2 = 7.5 \quad m/s$$